Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a V-a

Ediția a II-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Cuprins

Capitolul I
METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

I.1. METODA COMPARAȚIEI

A. *ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ*

Problemele care se rezolvă cu această metodă se caracterizează prin faptul că se cer două sau mai multe mărimi atunci când legăturile/relațiile dintre ele se pot deduce din compararea a două situații diferite, adică atunci când se cunosc câte două valori pentru fiecare mărime. Important este să observăm cauza care duce la diferențierea celor două situații.

Metoda constă în a face ca una dintre mărimi să fie adusă la aceeași valoare. În acest fel problema devine mai simplă, întrucât se elimină una sau mai multe necunoscute, în final rămânând o singură „necunoscută".

Dispunerea datelor într-o astfel de problemă se face cu respectarea relațiilor stabilite între mărimi, comparația dintre valorile aceleiași mărimi fiind pusă în evidență în mod direct prin așezarea valorilor aceleiași mărimi, unele sub altele.

Rezolvarea problemei se face prin eliminarea succesivă a necunoscutelor până se ajunge la o relație cu o singură necunoscută.

APLICAȚII:

1. Trei caiete și patru creioane costă 10 lei, iar nouă caiete și patru creioane costă 22 lei. Cât costă un caiet? Dar un creion?

Soluție:

3 caiete .... 4 creioane .... 10 lei
9 caiete .... 4 creioane .... 22 lei

Diferența de bani $22 - 10 = 12$ lei provine din diferența numărului de caiete: $9 - 3 = 6$.
Deducem că 6 caiete costă 12 lei, deci un caiet costă $12 : 6 = 2$ lei.
Din enunț, 3 caiete și 4 creioane costă 10 lei, deci 4 creioane costă $10 - 3 \cdot 2 = 4$ lei și atunci un creion costă 1 leu.

Răspuns: Un caiet costă 2 lei, un creion costă 1 leu.

2. Andreea a cumpărat 5 caiete și 3 creioane cu 116 lei. Pentru 4 creioane a plătit cât pentru 3 caiete. Care este prețul unui caiet? Dar al unui creion?

Soluție:

5 caiete .... 3 creioane .... 116 lei
Luăm cantități de 4 ori mai mari. Atunci:
20 caiete .... 12 creioane .... 464 lei
Deoarece 4 creioane costă cât 3 caiete, atunci 12 creioane costă cât 9 caiete.
Obținem că 20 caiete și încă 9 caiete costă 464 lei,

29 caiete costă 464 lei, deci un caiet costă 464 : 29 = 16 lei.
3 creioane costă 116 – 5 · 16 = 36 lei, deci un creion costă 12 lei.

3. Aflaţi trei numere naturale, ştiind că suma a câte două dintre ele este 112, 164, respectiv 130.

Soluţie:

Notăm x, y, z cele trei numere.

Avem:

$x + y = 112 \quad (1)$

$y + z = 164 \quad (2)$

$z + x = 130 \quad (3)$

Adunând membru cu membru cele 3 egalităţi, obţinem:

$x + y + y + z + z + x = 112 + 164 + 130$

$2x + 2y + 2z = 406$

$x + y + z = 203 \ (4)$

Comparăm (1) şi (4):

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 112 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 203 - 112, z = 91$$

Comparăm (2) şi (4):

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 164 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right. \Rightarrow x = 203 - 164, x = 39$$

Comparăm (3) şi (4):

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 130 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 203 - 130, y = 73$$

Numerele sunt 39, 73 şi 91.

4. Aflaţi numerele naturale a şi b, ştiind că $a + 6b = 135$ şi $2a + 3b = 90$.

Soluţie:

Din $2a + 3b = 90$ obţinem că $2 \cdot (2a + 3b) = 180$, adică $4a + 6b = 180$.

Avem următoarele egalităţi: $a + 6b = 135$

$4a + 6b = 180$.

Comparând egalităţile, deducem că $4a - a = 180 - 135$, deci $3a = 45$ şi $a = 15$.

Din $15 + 6b = 135$ obţinem $6b = 120$ şi $b = 20$.

Numerele sunt 15 şi 20.

5. 12 cuţite şi 10 furculiţe costă 156 lei, iar 15 cuţite şi 25 furculiţe de acelaşi fel costă 270 lei. Cât costă un cuţit şi cât costă o furculiţă?

Soluţie:

Dacă 12 cuţite şi 10 furculiţe costă 156 lei, atunci 6 cuţite şi 5 furculiţe costă 116 lei : 2 = 78 lei (1).

Dacă 15 cuţite şi 25 furculiţe costă 270 lei atunci 3 cuţite şi 5 furculiţe costă 270 lei : 5 = 54 lei (2).

Comparând (1) şi (2) deducem că (6 – 3) cuţite costă (78 – 54) lei, adică 3 cuţite costă 24 lei.

Obţinem că un cuţit costă 24 lei : 3 = 8 lei.

Apoi 10 furculiţe costă 156 lei – (12 · 8) lei sau

10 furculiţe costă 60 lei, de unde

o furculiţă costă 60 lei : 10 = 6 lei.

B. PROBLEME DE CREATIVITATE

1. Într-un bazin apa curge prin două robinete. Dacă se lasă deschis primul robinet timp de 4 ore şi al doilea 6 ore, în bazin se adună 19440 litri de apă, iar dacă se lasă deschis primul robinet 6 ore şi al doilea 4 ore, în bazin se adună 18360 litri de apă. Câţi litri de apă curg prin fiecare robinet într-o oră?

Soluţie:

Notăm cu a şi b cantitatea de apă ce se adună într-o oră de la primul, respectiv de la al doilea robinet. Atunci:

$4a$ .... $6b$ .... 19440 ℓ

$6a$ .... $4b$ .... 18360 ℓ

Obţinem prin adunare:

$10a$ .... $10b$ .... 37800 ℓ şi apoi

a .... b .... 3780 ℓ

$4a$ .... $4b$ .... 15120 ℓ

Comparăm cu prima relaţie: $4a$ .... $4b$ .... 15120 ℓ

$4a$ .... $6b$ .... 19440 ℓ

Rezultă:

$2b = 4320 \Rightarrow b = 2160$

Şi apoi $4a + 6 \cdot 2160 = 19440 \Rightarrow 4a = 6480 \Rightarrow a = 1620$

Într-o oră prin primul robinet curg 1620 ℓ, iar prin al doilea 2160 ℓ.

2. a) Diferenţa a două numere naturale este 2013. Dacă se dublează unul dintre numere, atunci diferenţa devine 1003. Aflaţi numerele.

b) Produsul a două numere naturale este 2013. Dacă se măreşte unul dintre numere cu 7, atunci produsul devine 6710. Aflaţi numerele.

Soluţie:

a) Deoarece diferenţa se micşorează, se dublează scăzătorul. Acesta este 2013 – 1003 = = 1010. Descăzutul este 2013 + 1010 = 3023. Numerele sunt 3023 şi 1010.

b) Fie a, b cele două numere. Atunci $a \cdot b = 2013$ şi $a \cdot (b + 7) = 6710$. Din a doua egalitate se obţine $a \cdot b + 7 \cdot a = 6710 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 6710 - 2013 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 4697 \Rightarrow a = 671$ şi apoi $b = 3$.

3. Patru mere cântăresc tot atât cât 5 pere, 3 pere cât 7 piersici, iar 5 piersici cât 8 nuci. Dacă pe un taler al unei balanţe aşezăm 3 mere, câte nuci trebuie să aşezăm pe celălalt taler pentru ca balanţa să fie în echilibru?

Concurs „Pitagora", 2002

Soluţie:

4 mere .... 5 pere $\Rightarrow$

$3 \cdot 4$ mere .... $3 \cdot 5$ pere $\Leftrightarrow$ 12 mere .... 15 pere; (1)

3 pere .... 7 piersici $\Rightarrow$

$5 \cdot 3$ pere ……………… $5 \cdot 7$ piersici $\Leftrightarrow$ 15 pere ……………35 piersici (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ 15 pere ……………… 12 mere
15 pere ……………… 35 piersici $\Bigg| \Rightarrow$ 12 mere ………… 35 piersici (3)

Dar 5 piersici ………… 8 nuci $\Rightarrow 7 \cdot 5$ piersici ………… $7 \cdot 8$ nuci $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 35 piersici ……….. 56 nuci (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow$ 12 mere …………. 56 nuci $\Rightarrow 12 : 4$ mere cântăresc tot atât cât $56 : 4$ nuci $\Rightarrow$ Pe un taler se așază 3 mere, iar pe celălalt se așază 14 nuci.

4. Trei gospodine au cumpărat:
Prima: 3 kg de mere, 3 kg pere și 5 kg gutui și a plătit 20 lei;
A doua: 6 kg mere, 4 kg pere, 2 kg gutui și a plătit 28 lei;
A treia: 6 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui și a plătit 39 lei.
Aflați cât costă un kilogram din fiecare fruct.

Soluție:
Adunând cantitățile cumpărate de primele două gospodine obținem că:
9 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui costă $20 + 28 = 48$ lei.
Comparând cu ce a cumpărat a treia gospodină rezultă că 3 kg de mere costă $(48 - 39)$ lei $= 9$ lei, de unde aflăm că 1 kg de mere costă 3 lei.
Avem o altă problemă:
3 kg pere, 5 kg gutui costă $(20 - 3 \cdot 3) = 11$ lei
4 kg pere, 2 kg gutui costă $(28 - 6 \cdot 3) = 10$ lei.
Atunci 12 kg pere, 20 kg gutui costă $4 \cdot 11$ lei $= 44$ lei.
12 kg pere, 6 kg gutui costă $3 \cdot 10$ lei $= 30$ lei.
Rezultă prin compararea relațiilor că 14 kg gutui costă $44 - 30 = 14$ lei, deci 1 kg gutui costă 1 leu și apoi 3 kg pere costă $11 - 5 = 6$ lei, deci
1 kg pere costă $6 : 3 = 2$ lei.
Răspuns:
1 kg mere costă 3 lei.
1 kg pere costă 2 lei.
1 kg gutui costă 1 leu.

5. Numerele naturale a, b, c verifică egalitățile:
$a \cdot b = 32$, $2 \cdot b \cdot c = 16$ și $3 \cdot a \cdot c = 48$.
Aflați cele trei numere.

Soluție:
Egalitățile se mai scriu:
$a \cdot b = 32$, $b \cdot c = 8$, $a \cdot c = 16$
și atunci $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = 32 \cdot 8 \cdot 16$
$(a \cdot b \cdot c)^2 = 4096$
$(a \cdot b \cdot c)^2 = 64^2$
Obținem $a \cdot b \cdot c = 64$
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $a \cdot b = 32 \Rightarrow c = 64 : 32$, $c = 2$.
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $b \cdot c = 8 \Rightarrow a = 64 : 8$, $a = 8$.
Din $a \cdot b \cdot c = 64$ și $a \cdot c = 16 \Rightarrow b = 64 : 16$, $b = 4$.
Numerele sunt $a = 8$, $b = 4$, $c = 2$.

I.2. METODA GRAFICĂ

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

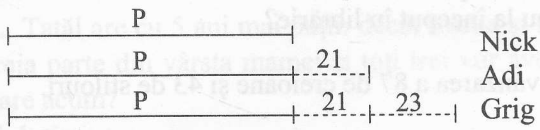
Metoda constă în reprezentarea prin desen a diferitelor mărimi care apar în problemă, evidenţierea relaţiilor dintre ele şi interpretarea desenului obţinut. Astfel, se poate forma „schema problemei” urmărind toate condiţiile acesteia.

De regulă, mărimile se reprezintă prin segmente între care se găsesc relaţii astfel încât toate segmentele să fie reprezentate în funcţie de un anumit segment (parte), a cărui mărime o considerăm necunoscută. Aflarea acesteia conduce apoi la aflarea tuturor necunoscutelor.

APLICAŢII:

1. Adi, Nick şi Grig rezolvă cele 133 de probleme ale unei reviste de matematică. Aflaţi câte probleme rezolvă fiecare dacă Adi rezolvă cu 21 de probleme mai multe decât Nick şi cu 13 mai puţine decât Grig.

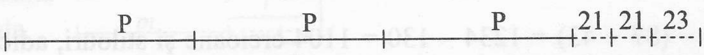
Soluţie:



Reprezentăm cu un segment („partea”) numărul de probleme cel mai mic. Acesta este al lui Nick.

Atunci Adi rezolvă cu 21 de probleme mai mult, iar Grig cu (21 + 13) probleme mai mult.

Numărul total de probleme este 133 şi se reprezintă astfel:



Cele trei segmente reprezintă $133 - (21 + 21 + 13) = 133 - 55 = 78$.

Un segment reprezintă $78 : 3 = 26$ (probleme).

Răspuns: Nick a rezolvat 26 probleme, Adi a rezolvat 47 probleme, iar Grig a rezolvat 60 probleme.

Verificarea confirmă că numerele sunt cele căutate:

$26 + 47 + 60 = 133$

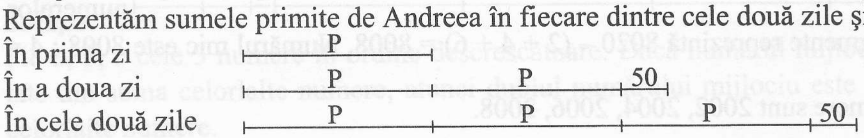
$26 + 21 = 47$

$60 - 13 = 47.$

2. Adrian a împrumutat-o pe sora sa Andreea, oferindu-i suma de 860 lei în două zile, a doua zi suma de bani fiind cu 50 lei mai mare decât dublul sumei oferite în prima zi. Aflaţi sumele de bani primite de Andreea în cele 2 zile.

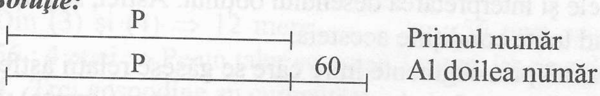
Soluţie:

Reprezentăm sumele primite de Andreea în fiecare dintre cele două zile şi în total.



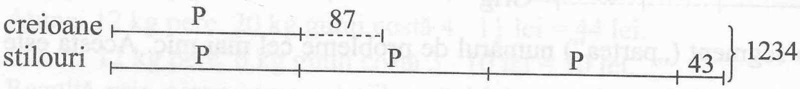
Cele trei părți reprezintă 860 – 50 = 810 lei, iar partea reprezintă 810 : 3 = 270 lei.
Andreea a primit 270 lei în prima zi și 590 lei a doua zi.

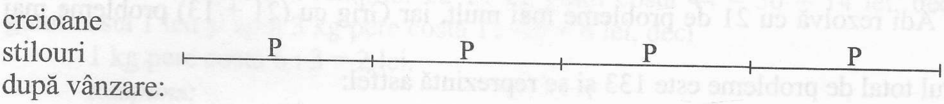
3. Suma a două numere este mai mare decât unul dintre ele cu 80. Aflați numerele dacă unul dintre numere este cu 60 mai mic decât celălalt.
Soluție:



Distingem două situații:
i) Suma este mai mare cu 80 decât primul număr. Atunci al doilea este 80 și numărul mic este 80 – 60 = 20
ii) Suma este mai mare cu 80 decât al doilea număr. Atunci primul număr este 80 și al doilea număr este 80 + 60 = 140
Numerele cerute sunt 20 și 80 sau 80 și 140.

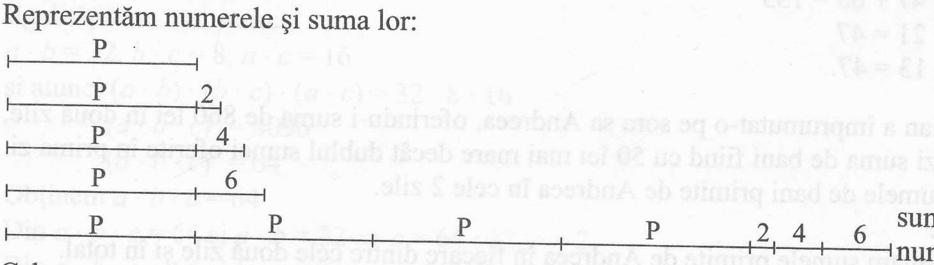
4. Într-o librărie erau 1234 creioane și stilouri. După ce s-au vândut 87 de creioane și 43 de stilouri, numărul creioanelor rămase reprezintă o treime din numărul stilourilor rămase. Câte creioane și câte stilouri erau la început în librărie?
Soluție:
Fie *P* numărul creioanelor rămase după vânzarea a 87 de creioane și 43 de stilouri.





După vânzare avem 1234 – (87 + 43) = 1234 – 130 = 1104 creioane și stilouri, adică 1104 : 4 = 276 creioane și 276 · 3 = 828 stilouri.
La început, erau 276 + 87 = 363 creioane și 828 + 43 = 871 stilouri.

5. Media aritmetică a 4 numere naturale pare consecutive este 2005. Aflați numerele.
Soluție:
Dacă media aritmetică a celor 4 numere este 2005, atunci suma lor este 2005 · 4 = 8020.
Fie *p* numărul cel mai mic.
Reprezentăm numerele și suma lor:



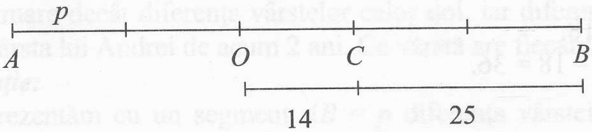
Cele patru segmente reprezintă 8020 – (2 + 4 + 6) = 8008. Numărul mic este 8008 : 4 = = 2002.
Cele patru numere sunt 2002, 2004, 2006, 2008.

B. PROBLEME DE CREATIVITATE

1. Un utilaj se deplasează din localitatea A spre localitatea B mergând cu aceeaşi viteză. După două ore de mers, nu ajunsese la punctul intermediar C, mai având de parcurs 14 km. După cinci ore de mers, utilajul a ajuns în localitatea B, dar trecuse de punctul C cu 25 km. Care este distanţa de la A la C?

Soluţie:

Notăm cu p şi reprezentăm cu un segment distanţa parcursă de utilaj într-o oră.



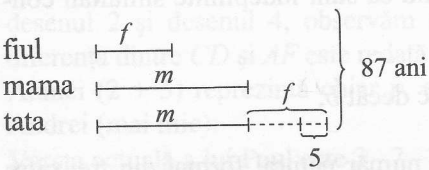
După două ore utilajul ajunge în „punctul O” şi, conform enunţului, distanţa OB este de $14 + 25 = 39$ km şi este parcursă în $(5 - 2) = 3$ ore.

Viteza utilajului este $39 : 3 = 13$ km/h, distanţa AO este de $13 \cdot 2 = 26$ km, iar distanţa AC este $26 + 14 = 40$ (km).

2. Tatăl are cu 5 ani mai puţin decât mama şi fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei şi toţi trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârstă are fiecare acum?

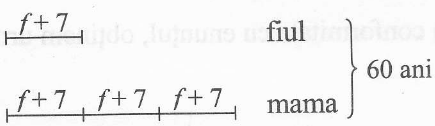
Soluţie:

Fie f vârsta fiului şi m vârsta mamei, acum. Suma vârstelor în prezent este $108 - 3 \cdot 7 =$ $= 87$ (ani).



$f + m = (87 + 5) : 2 = 46$ (ani). Tatăl are $46 - 5 = 41$ (ani).

Peste 7 ani, mama şi fiul vor avea împreună $46 + 14 = 60$ ani.



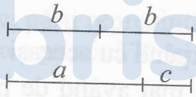
Fiul va avea $60 : 4 = 15$ (ani), deci acum are 8 ani. Mama are în prezent $46 - 8 = 38$ ani.

În concluzie, tatăl, mama şi fiul au respectiv vârstele: 41 ani, 38 ani, 8 ani.

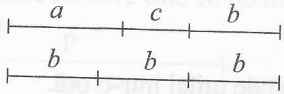
3. Suma a trei numere este 54. Cel mijlociu este jumătate din suma celorlalte două. Cel mic este cu 28 mai mic decât suma celorlalte două. Aflaţi cele trei numere.

Soluţie:

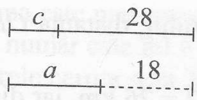
Fie a, b, c cele 3 numere în ordine descrescătoare. Dacă numărul mijlociu este jumătate din suma celorlalte numere, atunci dublul numărului mijlociu este egal cu suma celorlalte numere.



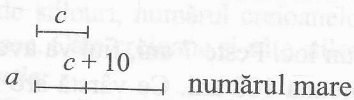
Suma numerelor se reprezintă în una din formele:



Numărul mijlociu este 54 : 3 = 18.
Suma celorlalte numere este 54 – 18 = 36.
Din enunț avem:



Numărul mic este cu 10 mai mic decât numărul mare.

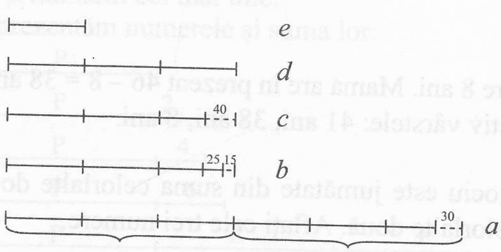


Suma lor fiind 36, deducem că dublul numărului mic este 36 – 10 = 26.
Numărul mic este 13, numărul mare 23, iar cele trei numere sunt 23, 18 și 13.

4. Aflați cinci numere naturale *a*, *b*, *c*, *d* și *e*, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) *a* este de două ori mai mare decât *b*;
2) *c* este cu 40 mai mic decât *d* și cu 25 mai mic decât *b*;
3) *d* este de trei ori mai mare decât *e*;
4) suma celor cinci numere este cel mai mare număr natural format din trei cifre distincte.

Soluție:
Sesizăm că „legătura" între numere o face *e*.
Reprezentăm numărul *e* printr-un segment și, în conformitate cu enunțul, obținem următoarele reprezentări ale celor cinci numere:



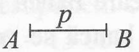
Suma numerelor este 987, reprezentată de 16 segmente de lungime *e*, mai puțin 85.
Atunci: 16 părți reprezintă 987 + 85 = 1072
O parte este 1072 : 16 = 67.

$a = 6 \cdot 67 - 30 = 402 - 30 = 372$
$b = a : 2 = 372 : 2 = 186$
$c = 3 \cdot 67 - 40 = 201 - 40 = 161$
$d = 3 \cdot 67 = 201$
$e = 67.$

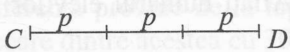
5. Despre Paul și Andrei știm următoarele: peste 5 ani vârsta lui Paul va fi de trei ori mai mare decât diferența vârstelor celor doi, iar diferența vârstelor celor doi este egală cu vârsta lui Andrei de acum 2 ani. Ce vârstă are fiecare?

Soluție:

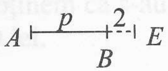
Reprezentăm cu un segment $AB = p$ diferența vârstelor și apoi completăm cu datele problemei.



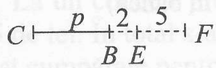
diferența vârstelor



vârsta lui Paul peste 5 ani



vârsta actuală a lui Andrei



vârsta lui Andrei peste 5 ani

Diferența vârstelor celor doi copii este constantă (aceeași) oricând se va calcula. Privind desenul 2 și desenul 4, observăm că avem reprezentate vârstele celor doi copii, iar diferența dintre CD și AF este redată în desenul 1 (o parte).
Atunci $(2 + 5)$ reprezintă chiar p, adică diferența de vârstă dintre Paul (mai mare) și Andrei (mai mic).
Vârsta actuală a lui Paul este $3 \cdot 7 - 5 = 21 - 5 = 16$ (ani).
Vârsta actuală a lui Andrei este $7 + 2 = 9$ (ani).

I.3. METODA FALSEI IPOTEZE

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Mai multe tipuri de probleme se rezolvă prin metoda falsei ipoteze, metodă denumită şi metoda presupunerilor sau a ipotezelor. Metoda constă în a presupune transformarea cerinţei problemei într-o ipoteză nouă. Aceasta, noua ipoteză, este emisă nu în ideea de a găsi răspunsul, ci pentru a sesiza nepotrivirea cu enunţul şi ce modificări trebuie făcute asupra ei (ipotezei). Metoda se numeşte *metoda falsei ipoteze* pentru că, de regulă, aceasta nu confirmă adevărul ipotezei adăugate, dar ajută la identificarea unor relaţii prin care se rezolvă problema.

APLICAŢII:

1. Într-o sală de lectură se află un anumit număr de bănci. Dacă în fiecare bancă se vor aşeza câte 2 elevi, atunci 7 elevi nu vor avea loc. Dacă în fiecare bancă se vor aşeza câte 3 elevi, atunci 5 bănci vor rămâne neocupate. Aflaţi numărul elevilor şi numărul băncilor.

Soluţie:

Prima ipoteză

Presupunem că sunt 9 bănci. Atunci numărul elevilor va fi:

$9 \cdot 2 + 7 = 25$ elevi (câte 2 în bancă) sau $(9 - 5) \cdot 3 = 12$ elevi (câte 3 în bancă)

Diferenţa este de $25 - 12 = 13$ elevi.

A doua ipoteză

Presupunem că sunt 10 bănci. Numărul elevilor va fi:

$10 \cdot 2 + 7 = 27$ elevi (câte 2 în bancă) sau $(10 - 5) \cdot 3 = 15$ elevi (câte 3 în bancă)

Diferenţa este $27 - 15 = 12$ elevi.

Constatăm că, mărind numărul băncilor cu 1, diferenţa între numărul elevilor se micşorează cu 1, aceasta trebuind să fie 0. Pentru a obţine acelaşi număr de elevi înseamnă că la presupunerea iniţială trebuie să mărim numărul băncilor cu 13.

Deci sunt $9 + 13 = 22$ bănci.

Atunci $22 \cdot 2 + 7 = 44 + 7 = 51$ elevi (câte 2 în bancă)

$(22 - 5) \cdot 3 = 17 \cdot 3 = 51$ elevi (câte 3 în bancă)

Răspuns: Sunt 51 elevi şi 22 bănci.

2. Într-o parcare sunt 7 vehicule, autoturisme şi motociclete, în total având 24 roţi. Câte motociclete sunt în parcare?

Soluţie:

Dacă în parcare toate vehiculele ar fi autoturisme, atunci, în total, ar avea $7 \cdot 4 = 28$ (roţi), ceea ce nu este în concordanţă cu enunţul.

Autoturismele având 4 roţi, iar motocicletele doar 2 roţi, rezultă că diferenţa de roţi provine de la faptul că în parcare sunt şi motociclete.

$28 - 24 = 4$ – diferenţa totală de roţi

$4 - 2 = 2$ – diferenţa de roţi pentru un singur vehicul.

Atunci $4 : 2 = 2$ şi obţinem că sunt 2 motociclete şi $7 - 2 = 5$ autoturisme.

Proba: $2 + 5 = 7$; $2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 24$.